Quadric Simplification en trois mots

Xavier Décoret

1 Présentation

Quadric Simplification est un algorithme de *simplification de maillage* mise au point par Michael Garland et Paul Heckbert en 1997 [GH97]. Cette approche utilise un opérateur local d'*effondrement de paires de points* et une métrique d'erreur *sommet-plans*. Pour une présentation des différents opérateurs de simplifications de maillage et des métriques d'erreurs, on consultera le livre de Luebke et al., chap. 2 et 3 [LRC+02]. Un maillage 3D est simplifié en remplaçant deux points par un seul, comme illustré sur la figure 1. Une fois cette opération effectuée, on supprime les faces dégénérées et on met à jour les relations d'adjacence.

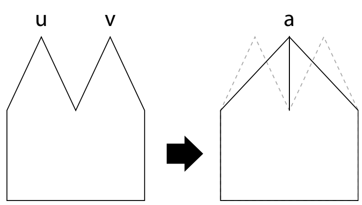

Fig. 1 – Simplification par effondrement de paires de points

L'erreur commise est définie sur les sommets du maillage initial, en mesurant de combien ils s'éloignent des plans supports des faces auquels ils appartiennent. Un sommet u qui, après une séquence d'effondrements le concernant, se retrouve au point a, entraîne donc une erreur :

$$e(u \to a) \equiv \sum_{F \in \lceil\lceil u \rceil\rceil} d^2(a, \mathcal{P}(F)) \tag{1}$$

où les F sont les faces adjacentes à u. La figure 2 illustre cette définition. Le carré de la distance d'un point $(x, y, z)^T$ à un plan est une forme quadratique en x, y, z et peut s'écrire, en coordonnées homogènes :

$$d^2(a, \mathcal{P}(F)) = a^T Q_F a \tag{2}$$

avec $a = (x, y, z, 1)^T$ et où Q_F est une matrice 4×4[1]. En

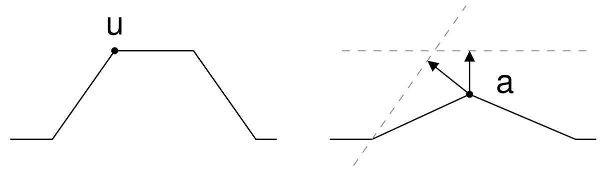

Fig. 2 – Erreur pour un sommet. Si u se retrouve en a, l'erreur est la somme du carré des distances aux plans en pointillés.

injectant dans (1) et par linéarité, on obtient :

$$e(u \to a) = a^T Q_u a \tag{3}$$

où $Q_u = \sum_{F \in \lceil\lceil u \rceil\rceil} Q_F$ est dite *quadrique d'erreur* de u. On a triviallement $u^T Q_u u = 0$ car u appartient à toutes les faces adjacentes !

2 Intérêt des quadriques d'erreurs

2.1 Compacité mémoire

Supposons que l'on effectue les effondrements $u, v \mapsto a$ puis $a, w \mapsto b$ comme indiqué sur la figure 3. Pour me-

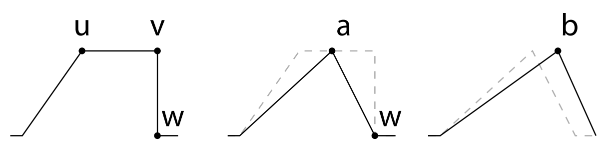

Fig. 3 – Succession d'effondrements

surer l'erreur commise lors de la dernière opération, il faut se rappeller que a a été obtenu auparavant par effondrement de u et v. Maintenir cette information pour tous les points introduits lors de la simplification est prohibitif et inefficace. Heureusement, c'est inutile ! En

[1] Si le plan est représenté par $p = [abcd]^T$ alors $Q = pp^T$

effet :

$$\begin{aligned}
e(u \to b) + e(v \to b) &= b^T Q_u b + b^T Q_v b \\
&= b^T (Q_u + Q_v) b \\
&= e(a \to b) \\
&\quad \text{avec } Q_a \equiv Q_u + Q_v
\end{aligned}$$

Lorsque l'on crée un nouveau point a, il suffit donc de lui associer comme quadrique d'erreur la somme des quadriques des deux points qu'il remplace. Cette quadrique garde implicitement trace des plans auquels appartenaient tous les sommets qui se "retrouvent" dans a !

2.2 Optimisation

Lorsque l'on décide d'effondrer deux sommets u et v, il faut choisir par quel point les remplacer. Idéalement, on voudrait prendre celui qui minimise l'erreur commise. Garland et Heckbert ont montré que ce point est donné par :

$$a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

lorsque la matrice est inversible. Dans le cas contraire, ils proposent de calculer l'erreur en u, en v et au milieu de $[u, v]$ et de choisir celui qui minimise l'erreur.

3 Algorithme

L'algorithme complet est le suivant. On initialise les quadriques de chaque sommets du modèle initial. On considère toutes les paires de sommets adjacents (reliés par une arrête) ou proches géométriquement[2] Pour chacune d'entre elles, on calcule le meilleur point où les effondrer et l'erreur (minimisée) correspondante. On insère les paires dans une liste de priorité classée par erreur croissante. On effondre la paire sur le dessus de la liste. On met à jour les nouvelles paires et on réitère jusqu'à obtenir un nombre de faces fixé, où une erreur maximale autorisée.

[2] C'est la partie "sensible" de l'algorithme. Considérer toutes les paires entraîne une complexité quadratique. Il faut un peu de doigté pour choisir quelles paires considérer.

4 Conclusion

Cet algorithme est très efficace en pratique. Il a été étendu [GH98] pour tenir compte des attributs spécifiés à la surface du maillage (normale, couleur, coordonnées textures...). Une implémentation est disponible sur le web (`http://graphics.cs.uiuc.edu/~garland/software/qslim.html`).

Références

[GH97] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. pages 209–216, 1997.

[GH98] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. pages 263–269. IEEE-CS Press, 1998.

[LRC+02] D. Luebke, M. Reddy, J. Cohen, A. Varshney, B. Watson, and R. Huebner. *Level of Detail for 3D Graphics*. Morgan Kaufmann, first edition, july 2002.