

# Systèmes dynamiques

Cette feuille présente brièvement quelques principes d'animation dynamique.

## 1. Schéma d'intégration de Newton-Cotes

Il correspond au développement à l'ordre 2 de la formule de Taylor:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t+h) &= \dot{q}(t) + h\ddot{q}(t) \\ q(t+h) &= q(t) + h\dot{q}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{q}(t)\end{aligned}$$

où  $q$  représente la position d'une particule et  $h$  est le pas de temps de l'animation. Il présente l'avantage d'être exact pour les accélérations constantes (cas de la chute libre). C'est ce schéma que nous allons utiliser dans le TP.

On s'intéresse donc à calculer l'accélération, c'est à dire la dérivée seconde du système:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t)$$

De tels systèmes permettent de simuler des lois physiques et ainsi d'obtenir des animations et des formes d'aspect naturel. Des lois élémentaires communes (Newton) permettent de combiner divers modèles d'action (gravité, ressorts,...).

*Loi d'inertie:* Permet de calculer l'accélération d'une particule  $i$  de masse  $m_i$  en fonction des forces qui lui sont appliquées:

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{i \neq j} f_{i \rightarrow j}$$

*Loi d'interaction:* Les forces sont réciproques, au signe près:

$$f_{j \rightarrow i} = -f_{i \rightarrow j}$$

## 2. Modèles d'action

*Pesanteur:* Dans une scène terrestre la pesanteur  $g$  est uniforme et applique un poids proportionnel à la masse:

$$f_{\rightarrow i} = m_i g$$

*Viscosité:* La viscosité d'un milieu s'oppose au mouvement des corps qui s'y déplacent. Elle se modélise par un coefficient  $\nu$  positif qui agit dans la direction opposée à la vitesse:

$$f_{\rightarrow i} = -\nu \dot{q}_i \quad \nu \geq 0$$

*Ressort:* Un ressort sert à simuler un comportement élastique qui tend à ramener deux particules à une distance donnée l'une de l'autre. L'action d'un ressort est proportionnelle à son allongement  $l$  et à sa raideur  $k$  :

$$f_{j \rightarrow i}^{(k)} = k \left( \frac{\|q_i - q_j\| - l}{\|q_i - q_j\|} \right) \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|}$$

*Amortisseur:* Un amortisseur sert à réduire le mouvement relatif de deux particules. L'action d'un amortisseur est proportionnel à sa viscosité  $\nu$  et à sa vitesse d'allongement (différence des vitesses projetées sur la direction). L'action sur une particule  $i$  est donnée par la relation:

$$f_{j \rightarrow i}^{(\nu)} = \nu \left( \frac{\dot{q}_i - \dot{q}_j}{\|q_i - q_j\|} \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|} \right) \frac{q_i - q_j}{\|q_i - q_j\|}$$

où le premier terme est la constante de viscosité, le deuxième terme est la vitesse d'allongement relatif, et le troisième terme la direction de la force.

*Ressort amorti:* Un ressort amorti s'obtient en combinant un ressort et un amortisseur en parallèle. La force se calcule en sommant les contributions définies pour le ressort et l'amortisseur :

$$f_{j \rightarrow i} = f_{j \rightarrow i}^{(k)} + f_{j \rightarrow i}^{(\nu)}$$

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent se représenter par des ressorts amortis, par exemple les corps déformables élastiques. Selon les valeurs des coefficients utilisés, le retour à une position d'équilibre s'accompagne ou non d'oscillations.

### 3. Collisions

Soit une particule traversant un plan entre l'instant  $t$  et l'instant  $t+h$ . Le traitement de collision s'effectue en trois temps:

1. détection de collision
2. recherche d'une configuration annulant l'interpénétration
3. rebond

*Détection de collision :* la détection de collision est un problème très complexe dans le cas général. Pour une particule contre un plan il suffit d'écrire que la distance au plan est négative, autrement dit:

$$pq.n < 0$$

où le plan est modélisé par un point  $p$  et une normale  $n$ , et  $q$  est la position de la particule.

*Configuration annulant l'interpénétration :* une fois une collision détectée, on cherche dans quelle configuration seraient les particules si le choc était parfaitement absorbant. Dans le cas de la particule contre un plan fixe, cela revient à projeter cette particule et sa vitesse sur le plan, autrement dit:

$$\begin{aligned} q_c &= q - pq.n n \\ \dot{q}_c &= \dot{q} - \dot{q}.n n \end{aligned}$$

*Rebond :* Le rebond correspond à la restitution de l'énergie absorbée au cours du choc. On le caractérise par un coefficient  $\epsilon$  normalement compris entre 0 (choc parfaitement absorbant) et 1 (choc parfaitement élastique). La différence entre la configuration de choc mou et la configuration d'interpénétration est reportée proportionnellement à  $\epsilon$  (loi de Poisson). Autrement dit:

$$\begin{aligned} q &= q_c + \epsilon(q_c - q) \\ \dot{q} &= \dot{q}_c + \epsilon(\dot{q}_c - \dot{q}) \end{aligned}$$